Endomorphismes symétriques

I Les endomorphismes symétriques

Dans ce paragraphe, E est un espace euclidien de dimension n, muni d'une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$.

I.1 Définition

Un endomorphisme ϕ de E est symétrique $\Leftrightarrow \forall (u, v) \in E^2$, $< u, \phi(v) >=< \phi(u), v >$
Exemples : une projection orthogonale est un endomorphisme symétrique.

Si p est la projection orthogonale de l'espace euclidien E sur le sous-espace vectoriel F , alors tout vecteur u ou v se décompose de façon unique sous forme de somme : $u = u' + u''$, $v = v' + v''$ où :
$u' = p(u) \in F$, $v' = p(v) \in F$, $u'' = u - p(u) \in F^\perp$, $v'' = v - p(v) \in F^\perp$.
Or : $< u, p(v) >=< u' + u'', v' >=< u', v' >=< p(u), p(v) >$ puisque u' et v'' sont orthogonaux .
Donc $< u, p(v) >=< p(u), p(v) >$ et par symétrie $< p(u), v >=< p(u), p(v) >=< u, p(v) >$

I.2 Théorème

Si $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormale de E et ϕ un endomorphisme de matrice A dans la base $\mathcal{B}$:
L'endomorphisme ϕ est symétrique si et seulement si sa matrice A (dans la base orthonormale $\mathcal{B}$) est symétrique.

- **Démonstration**

  Soient $u = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $v = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i e_i$ deux vecteurs de E de coordonnées $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$.

$$< u, \phi(v) >=< \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \phi\left(\sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) >= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j < e_i, \phi(e_j) >$$

et $< \phi(u), v >= \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} x_i y_j < \phi(e_i), e_j >$,

Si ϕ est symétrique alors $\forall (i, j) \in \{1, ..., n\}$, $< e_i, \phi(e_j) >=< \phi(e_i), e_j >$ donc la matrice de ϕ dans $B = (e_1, ..., e_n)$,
$A = \begin{pmatrix} < e_1, \phi(e_1) > & ... & < e_1, \phi(e_n) > \\ .... & ... & ... \\ < e_n, \phi(e_1) > & ... & < e_n, \phi(e_n) > \end{pmatrix}$ *est symétrique.*

Rappel : **les coordonnées de $\phi(e_1), ..., \phi(e_n)$ qui constituent les colonnes de la matrice A de ϕ, sont les produits scalaires car B est orthonormale**.

Réciproquement
si A est symétrique, alors $< u, \phi(v) >= {}^tX (AY) = {}^tXAY$, et $< \phi(u), v >= {}^t(AX) Y = {}^tX\,{}^tAY = {}^tXAY$, donc ϕ est symétrique.

I.3 Valeurs propres d'un endomorphisme ou d'une matrice symétrique

I.4 Théorèmes

Un endomorphisme symétrique ϕ de l'espace euclidien E ne possède que des valeurs propres réelles :
il existe une base orthonormale de vecteurs propres $\Leftrightarrow$
ϕ est diagonalisable, et les différents sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.

Une matrice symétrique A à coefficients réels ne possède que des valeurs propres réelles et A est diagonalisable :
plus précisément il existe une matrice de passage P telle que $P^{-1} = {}^tP$ et telle que ${}^tPAP$ soit diagonale.

*Une matrice P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1} = {}^tP$ est une matrice de passage d'une base orthonormale à une autre bas orthonormale : on dit que la matrice P est "***orthogonale***".*

I.5 Démonstration

- *Existence de valeurs propres :*
  La recherche des valeurs propres passe par la résolution d'une équation $P(\lambda) = 0$, $P(\lambda)$ étant un polynôme en λ obtenu en "triangularisant" la matrice $A - \lambda I$. Dans le corps des complexes, une telle équation possède au moins une racine complexe (Théorème de D'Alembert).
- *Les valeurs propres d'une matrice symétrique sont réelles :*
  Si λ est une valeur propre complexe et X un vecteur propre (à composantes complexes) associé à λ , alors en définissant des

"conjugués" des matrices, on obtient tout de suite :
$AX=\lambda X$ *et* $\overline{AX}=\overline{\lambda X}$; *mais* $\overline{A}=A={}^tA$, *donc en transposant :* ${}^t\overline{XA}=\overline{\lambda}\,{}^t\overline{X}$ *et par suite :*
${}^t\overline{X}AX=\left({}^t\overline{X}A\right)X=\left(\overline{\lambda}\,{}^t\overline{X}\right)X=\overline{\lambda}\,{}^t\overline{X}X$ *et* ${}^t\overline{X}AX={}^t\,\overline{X}\left(AX\right)={}^t\overline{X}\left(AX\right)={}^t\overline{X}\left(\lambda X\right)=\lambda\,{}^t\overline{X}X$
ce qui implique puisque $\overline{X}X=\sum\limits_{i=1}^{n}\overline{x_i}x_i=\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|^2$ *est un réel (c'est la somme des carrés des modules des composantes complexes de* X*) non nul (* $X\neq\left(\begin{smallmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{smallmatrix}\right)$ *est vecteur propre) :* $\overline{\lambda}=\lambda$ *.*
De plus comme les composantes de X *sont solutions d'un système à* n *équations à coefficients réels :* $(A-\lambda I)X=\left(\begin{smallmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{smallmatrix}\right)$*, ces composantes sont des réels.*

- *un endomorphisme symétrique* ϕ *possède une base orthonormale de vecteurs propres :*
Cela se démontre par récurrence . C'est évident si $n=1$*.*
Sinon si c'est vrai jusqu'à la dimension $n-1$*, soit* λ *est une valeur propre réelle associée à un vecteur propre* u*.*
On pose $F=(\mathrm{Vect}(u))^{\perp}$ *, .F est un hyperplan de dimension* $n-1$ *orthogonal à* $\mathrm{Vect}(u)$*.*
On a $\forall v\in F=(\mathrm{Vect}(u))^{\perp}$*,* $<u,\phi(v)>=<\phi(u),v>=\lambda<u,v>=0$*,*
donc : $v\in F=(\mathrm{Vect}(u))^{\perp}\Rightarrow\phi(v)\in F$*.*
Ce qui signifie que l'hyperplan F *est stable par* ϕ *, la restriction de* ϕ *à* F*, espace de dimension* $n-1$*, euclidien pour la restriction du produit scalaire à ce sous-espace, est encore un endomorphisme symétrique, et on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence :*
il existe une base orthonormale $(e_1,...,e_{n-1})$ *de vecteurs propres pour la restriction de* ϕ *à* F*.*
On ajoute le vecteur $e_n=\frac{1}{\|u\|}u\in\mathrm{Vect}(u)=F^{\perp}$ *(ou son opposé), qui est de norme 1, qui est orthogonal à* $e_1,...,e_{n-1}$*, pour obtenir une famille orthonormale* $(e_1,...,e_n)$ *qui sera une base de* E
- *A partir de cette base orthonormale de vecteurs propres* $(e_1,...,e_n)$*, si on regroupe les* k *vecteurs associés à une même valeur propre* λ*, on obtiendra une base orthonormale du sous-espace propre* E_λ *et les* $(n-k)$ *autres vecteurs formeront une base de l'orthogonal* $E_\lambda^{\perp}$ *: les autres sous-espace propres étant inclus dans* $E_\lambda^{\perp}$ *sont orthogonaux à* E_λ*.*

Une autre façon de démontrer très rapidement cette propriété :
si u *et* v *sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres* λ *et* μ *distinctes, donc si* $\phi(u)=\lambda u$ *et* $\phi(v)=\mu v$ *alors*
$<u,\phi(v)>=<u,\mu v>=\mu<u,v>$ *et* $<u,\phi(v)>=<\phi(u),v>=<\lambda u,v>=\lambda<u,v>\Rightarrow<u,v>=0$*,*
deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont nécessairement orthogonaux.
- *Pour la traduction matricielle, se rappeler que les matrices de passage entre bases orthonormales vérifient* ${}^tP=P^{-1}$*.*

I.6 Réciproque

Un endomorphisme ϕ de E, qui est diagonalisable (i.e. la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à celle de E), et dont les sous espaces propres sont orthogonaux deux à deux, est un endomorphisme symétrique, dont la matrice dans une base orthonormale est symétrique.

- *Démonstration*

Si $E_1,...,E_k$ *sont les sous-espaces propres associés aux valeurs propres* $\lambda_1,...,\lambda_k$*, alors* ϕ *diagonalisable* $\Leftrightarrow E_1\oplus...\oplus E_k=E$*.*
Si $(u,v)\in E^2$*, il y a des décomposition uniques*
$u=u_1+...+u_k,\ v=v_1+...+v_k$ *avec* $(u_1,...,u_k)\in E_1\times...\times E_k$ *et* $(v_1,...,v_k)\in E_1\times...\times E_k$*.*
$\phi(u)=\phi(u_1+...+u_k)=\phi(u_1)+...\phi(u_k)=\lambda_1u_1+...+\lambda_ku_k$
et $\phi(v)=\phi(v_1+...+v_k)=\phi(v_1)+...\phi(v_k)=\lambda_1v_1+...+\lambda_kv_k$*.*
Par suite
$\langle u,\phi(v)\rangle=\langle u_1+...+u_k,\lambda_1v_1+...+\lambda_kv_k\rangle=\lambda_1\langle u_1,v_1\rangle+...+\lambda_k\langle u_k,v_k\rangle$ *et*
$\langle\phi(u),v\rangle=\langle\lambda_1u_1+...+\lambda_ku_k,v_1+...+v_k\rangle=\lambda_1\langle u_1,v_1\rangle+...+\lambda_k\langle u_k,v_k\rangle$
car si $i\neq j$*, on a* $\langle u_i,v_j\rangle=0$ *puisque* $(u_i,v_j)\in E_i\times E_j$ *et que* $E_i\perp E_j$*.*

Exemple, une projection ou une symétrie orthogonale, de base F *(sous-espace propre associé à la valeur propre 1), de direction* $F^{\perp}$*, sont des endomorphismes symétriques. Dans une base orthonormale, leurs matrices sont symétriques.*

II Formes quadratiques

II.1 Définition

Soit ϕ un endomorphisme symétrique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$: la forme quadratique associée à ϕ est l'application q de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est définie par $x\mapsto q(x)=<\phi(x),x>$, où $<\ ,\ >$ est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

Si $A=(a_{i,j})$ est une matrice (symétrique) associée à ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors en notant $X=\left(\begin{smallmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{smallmatrix}\right)$ la matrice colonne des coordonnées de $x=(x_1,...,x_n)$, on a
$q(x)=<\phi(x),x>={}^t(AX)X={}^tXAX=\sum\limits_{(i,j)\in\{1,...,n\}^2}a_{i,j}x_ix_j$ polynôme en $(x_1,...,x_n)$ homogène de degré 2.

II.2 Signe d'une forme quadratique sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

Pour l'étude du signe de $q(x) = {}^tXAX = \sum_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}^2} a_{i,j}x_ix_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}x_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} a_{i,j}x_iy_j$
(en regroupant grâce à la symétrie $a_{i,j} = a_{j,i}$), il y a 2 stratégies :

1. Etudier les **signes des valeurs propres** de la matrice diagonalisable A.
Il existe une base orthonormale de vecteurs propres de A,
$(X_1, \ldots, X_n)$, X_i *étant un vecteur propre associé à la valeur propre* λ_i, *un vecteur* $X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$ *donne :*
$$\begin{aligned} {}^tXAX &= {}^t\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_iX_i\right) A \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_iX_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\alpha_j\,{}^tX_iAX_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\alpha_j\,{}^tX_i\lambda_jX_j \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\alpha_j\lambda_j\,{}^tX_iX_j = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\lambda_i \end{aligned}$$
puisque la base est orthonormale.

Le signe de la somme dépend du signe des valeurs propres.
La forme quadratique a un signe constant si toutes les valeurs propres ont le même signe.
Dans certains cas, il faudra préciser si la somme ne s'annule que pour $X = \left(\begin{smallmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{smallmatrix}\right)$, *il faudra un travail spécifique supplémentaire pour résoudre* $q(x) = 0$, *qui consiste à voir si* $\lambda = 0$ *est valeur propre ou encore savoir si* A *est inversible ou pas.*

2. Décomposer ${}^tXAX$ en **combinaison linéaire de carrés**, en regardant les coefficients positifs, les coefficients négatifs :
la forme quadratique a un signe constant si tous les coefficients ont le même signe.
Cette décomposition en somme de carrés se fait souvent en regroupant tous les termes contenant x_1 dans un seul carré, puis tous les termes contenant x_2 dans un deuxième carré, etc...
Mais il n'y a aucune obligation quant l'ordre sur $x_1, x_2, \ldots$ pour choisir les regroupements, ni unicité de la décomposition (en général).

II.3 Rappels sur l'expression analytique d'un produit scalaire

On a déjà vu que si Φ était une forme bilinéaire symétrique sur l'espace vectoriel E de dimension n, si u et u' sont deux vecteurs de coordonnées X et X' dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ quelconque de E, alors l'expression analytique de Φ est :
$\Phi(u, u') = {}^tXAX'$, où la matrice symétrique A a pour coefficients de ligne i et de colonne j, $a_{i,j} = \Phi(e_j, e_i) = \Phi(e_i, e_j)$.

Φ est un produit scalaire, si on démontre que : $\forall u \in E^*$, $\Phi(u, u) = {}^tXAX > 0$, c'est bien un exemple d'étude de signe d'une forme quadratique.

Remarque :
En utilisant la méthode de Schmidt, on démontre qu'il existe une matrice P de passage (inversible) permettant de passer de la base $\mathcal{B}$ de départ à une base orthonormale $\mathcal{B}'$ pour Φ.

- Si u et u' ont pour coordonnées X et X' dans $\mathcal{B}$, Y et Y' dans $\mathcal{B}'$, alors $\Phi(u, u') = {}^tXAX' = {}^tYY'$,
et comme $Y = P^{-1}X$ et $Y' = P^{-1}X'$, $\Phi(u, u') = {}^tXAX' = {}^tX\,{}^tP^{-1}P^{-1}X'$ soit par suite $A = {}^tP^{-1}P^{-1}$.
- Cette égalité prouve que A doit être inversible (comme produit de matrices inversibles) :
(*sinon* $X \in \operatorname{Ker} A \Rightarrow AX = 0 \Rightarrow {}^tXAX = 0$, *l'axiome de stricte positivité n'est pas vérifié)*
- On prouve aussi que les valeurs propres d'une matrice symétrique ${}^tMM$ sont positives :
comme $\forall X \neq 0$, ${}^tX\,{}^tMMX = \|MX\|^2 \ge 0$, (*pour la norme associée au produit scalaire canonique*)
${}^tMMX = \lambda X \Rightarrow {}^tX\,{}^tMMX = \lambda\,{}^tXX \ge 0 \Rightarrow \lambda \ge 0$

II.4 Quatre exemples

1. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$,
$q(v) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2x^2 - 4xy + 2xz + 5y^2 - 4yz + 2z^2.$
   - Méthode 1, on décompose en combinaison linéaire de carrés
$$\begin{aligned} q(v) &= 2x^2 - 4xy + 2xz + 5y^2 - 4yz + 2z^2 = 2\left(x - y + \tfrac{z}{2}\right)^2 + 3y^2 - 2yz + \tfrac{3}{2}z^2 \\ &= 2\left(x - y + \tfrac{z}{2}\right)^2 + 3\left(y - \tfrac{z}{3}\right)^2 + \tfrac{7}{6}z^2 \end{aligned}$$
$\forall v \in E$, $q(v) \ge 0$ et $q(v) = 0 \Rightarrow v = 0$. (On a un système échelonné vite résolu !)
   - Méthode 2, on cherche les valeurs propres

Les valeurs propres de A sont obtenues en cherchant le rang de $A-\lambda I=\begin{pmatrix}2-\lambda & -2 & 1\\ -2 & 5-\lambda & -2\\ 1 & -2 & 2-\lambda\end{pmatrix}$

On effectue : $\left\{\begin{array}{l}L_3\\ L_2+2L_3\\ -L_1+(2-\lambda)L_3\end{array}\right.$ $\operatorname{rang}(A-\lambda I)=\operatorname{rang}\begin{pmatrix}1 & -2 & 2-\lambda\\ 0 & 1-\lambda & 2-2\lambda\\ 0 & -2+2\lambda & 3-4\lambda+\lambda^2\end{pmatrix}$

puis $\left\{\begin{array}{l}L_1\\ L_2\\ 2L_2+L_3\end{array}\right.$, $\operatorname{rang}(A-\lambda I)=\operatorname{rang}\begin{pmatrix}1 & -2 & 2-\lambda\\ 0 & 1-\lambda & 2-2\lambda\\ 0 & 0 & 7-8\lambda+\lambda^2\end{pmatrix}$,

les valeurs propres racines du produit $(1-\lambda)\left(7-8\lambda+\lambda^2\right)$ sont 1 et 7, elles sont strictement positives.

donc $\forall v\in E$, $q(v)\geq 0$ et $q(v)=0\Rightarrow v=0$.

très précisément, on remarque que le sous-espace $\ker(A-I)$ *est de dimension* 2, *il existe une et une matrice de passage orthogonale* P *telle que* ${}^tP=P^{-1}$ *telle que*

$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&7\end{pmatrix}={}^tPAP\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2&-2&1\\-2&5&-2\\1&-2&2\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&7\end{pmatrix}{}^tP=PD\,{}^tP$, où $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&7\end{pmatrix}$

si $Y=P^{-1}X={}^tPX=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}={}^tP\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

$q(v)={}^tXAX={}^tX\left(PD{}^tP\right)X={}^t\left({}^tPX\right)D\left({}^tPX\right)={}^tYDY=y_1^2+y_2^2+7y_3^2\geq 0$ et

$q(v)=0\Rightarrow Y=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow v=0.$

2. Si $B=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}$,

   $q(v)=\begin{pmatrix}x&y&z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=2x^2+2xy+2xz+2y^2-2yz+2z^2$

   – Méthode 1 : on décompose

   $q(v)=2x^2+2xy+2xz+2y^2-2yz+2z^2=2\left(x+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}\right)^2+\frac{3}{2}y^2-3yz+\frac{3}{2}z^2$

   $=2\left(x+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}\right)^2+\frac{3}{2}(y-z)^2$

   – Méthode 2 : les valeurs propres de B sont 0 et 3.

   $\forall v\in E$, $q(v)\geq 0$ et $q(v)=0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}x+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=0\\ y=z\end{array}\right.\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\in\operatorname{Ker}(A)$.

3. Si $C=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$,

   $q(v)=\begin{pmatrix}x&y&z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=x^2+2xy-2xz+y^2+2yz+z^2$

   – Méthode 1 : on décompose

   $q(v)=x^2+2xy-2xz+y^2+2yz+z^2$

   $=(x+y-z)^2+4yz=(x+y-z)^2+(y+z)^2-(y-z)^2$

   $q(v)<0$ si par exemple $(x,y,z)=(2,-1,1)$, vecteur pour lequel $(x+y-z)^2+(y+z)^2=0$,

   $q(v)>0$ si par exemple $(x,y,z)=(0,1,1)$, vecteur pour lequel $(y-z)^2=0$

   – Méthode 2 : les valeurs propres de C sont 2 et -1.

   $*$ *En fait on a très précisément* $\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$, *donc* $X=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\in\ker(C-2I)$,

   dans ce cas $q(v)={}^tXCX={}^tX(2X)=2\,{}^tXX>0$

$*$ *Un vecteur propre associé à la valeur propre* (-1) *, donc appartenant à*
$\ker(C+I) = \ker \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, *donnera :*
$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -3 < 0.$

4. Si $D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
   $q(v) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4xy + 4xz - y^2 + z^2,$
   - Méthode1 :on décompose
     $q(v) = (z+2x)^2 - 4x^2 + 4xy - y^2 = (z+2x)^2 - (2x-y)^2 = (z+y)(4x-y+z)$, le signe change, on résout facilement $q(v) = 0$...
   - Méthode 2 : les valeurs propres de D sont -3, 0, 3...